基于 NT 降阶的乘积型区间二型模糊控制器结构分析 *

施建中，李 荣，杨 勇，梁绍华

(南京工程学院 能源与动力工程学院, 南京 211167)

摘 要：目前区间二型模糊控制器的结构分析主要基于 Zadeh 的取小推理和 KM 降阶算法。KM 算法是一循环迭代过程，没有解析解，无法进行控制器的稳定性分析，且取小推理需要进行输入空间的划分，过程较为繁琐。提出了一种简化的区间二型模糊控制器分析方法，该方法首先采用乘积推理，模糊规则的激发隶属度为输入变量隶属度的乘积，统一了控制器的表达式形式，避免了输入空间的划分过程，模糊控制器的结构分析更加简单。二型模糊集合采用 NT 降阶算法，该算法直接利用首隶属度函数的上、下限的平均值来进行解模糊化操作，避免了迭代计算，简化了降阶过程。控制器的表达式等效于一个增量式 PI（位置式 PD）控制器，其比例增益、积分增益以及补偿项均为非线性可调。而且还能得到控制器的闭环表达式，易于进行区间二型模糊控制器的稳定性分析与设计等。

关键词：区间二型模糊控制；KM 降阶；NT 降阶；乘积推理；结构分析

中图分类号：TP273+.4　　doi: 10.3969/j.issn.1001-3695.2017.10.0782

Structural analysis of product interval two fuzzy controller using NT type reduction

Shi Jianzhong, Li Rong, Yang Yong, Liang Shaohua

(*School of Energy & Power Engineering*, *Nanjing Institute of Technology*, *Nanjing* 211167, *China*)

Abstract: The structure analysis of interval type 2 fuzzy controller is based on Zadeh's min inference and KM type reduction, which is an iterative process without analytical solution for the stability analysis of controller, and input space dividing is adopted under min inference, thus the process is tedious. Thia paper proposed a simplify structure analysis method in this article, used the product inference, the fuzzy rules fired membership function of which obtained by the product of the membership degree of the input variable. It unified the expression of controller and avoided division process of input space, and the structure analysis of fuzzy controller was more simple. It used NT type reduction algorithm in this method, which defuzzification by the average of upper and lower limits of first membership function, avoided iterative process and simplified type reduction process. The controller expression was equivalent to an incremental PI controller (or position PD controller) with nonlinear adjustable proportional gain, integral gain and compensation term. Moreover, the closed-loop expression of the controller could be obtained, and the stability analysis and design of the controller were easy to be carried out.

Key words: interval type 2 fuzzy control; KM type reduction; NT type reduction; product inference; structure analysis

0 引言

随着区间二型模糊集合理论的研究深入，区间二型模糊控制系统在很多实际应用中都优于传统的一型模糊控制系统。为什么区间二型模糊控制器具有较好的控制效果，很多学者对区间二型模糊控制器的结构进行了详细的分析。目前常见的区间二型模糊控制器的分析来源于一型模糊控制器的结构分析，将模糊系统的输入变量的空间划分为若干个区间，每个区间对应不同的模糊规则激发隶属度[1~3]。区间二型模糊控制器和传统一型模糊控制器的重要区别就是存在降阶过程，区间二型模糊控制器表达式的推导还需要考虑降阶问题。

Du 等人[4]利用输入空间划分的方法，将所有的模糊规则都考虑取平均，得到了区间二型模糊 PI（PD）控制器的一般表达式。该方法的一个好处就是避免了降阶过程，但要处理的模糊规则数较多，达到了 16 条。Nie 等人[5]利用常见的区间二型模糊集合 KM 降阶算法，分析得到了区间二型模糊 PI 和 PD 控制器的一般表达式。

文献[4,5]采用的区间二型模糊控制器的首隶属度函数都是

收稿日期：2017-10-16；**修回日期**：2018-01-11　**基金项目**：南京工程学院校级科研基金项目（YKJ201523，YKJ201408）；南京工程学院青年基金项目（QKJA201504）

作者简介：施建中（1984-），男，江苏淮安人，讲师，博士，主要研究方向为二型模糊系统辨识与控制（sjz-ha@163.com）；李荣（1987-），男，讲师，博士研究生，主要研究方向为分数阶系统控制；杨勇（1986-），女，讲师，博士研究生，主要研究方向为槽式太阳能发电系统建模与控制；梁绍华（1972-），男，教授级高级工程师，博士，主要研究方向为电厂锅炉性能试验.

对称的线性形式，采用的都是 Mamdani 模糊控制的结构。而 Zhou 等人将区间二型模糊器的首隶属度函数进行了扩展，同样将输入空间进行划分，采用 KM 降阶算法，得到了更一般的线性区间二型 Mamdani 模糊控制的结构形式[6]和 T-S 模糊控制器形式[7]。文献[8]针对区间二型模糊控制器采用非线性的首隶属度函数进行了分析，得到了具有非线性形式首隶属度函数的区间二型模糊 PI（PD）控制器的一般结构。文献[9] 提出了一种基于乘积型的二型模糊控制器的结构，针对对称线性的首隶属度函数和 KM 降阶算法，得到了此种情况下区间二型模糊控制器的解析结构推导。

除了文献[4]以外，文献[5~9]都采用了 KM 降阶算法，但是 KM 降阶算法是目前区间二型模糊集合降阶算法中效率最低的，虽然有很多效率更高的降阶算法，如 EKM[10]、EIASC[11]、ODS[12]等，但这些算法的本质与 KM 一样，都是求取两个切换点以得到降阶的两个端点，在取平均值得到降阶结果。除了文献[9]以外，文献[4~8]在模糊推理部分都采用的 Zadeh 的 AND 推理，也即取小，那么该过程需要将输入空间进行划分，根据参数的不同，划分的区间个数也不同，分析的空间数量较多，每个输入空间对应不同的控制器表达式，过程也较为繁杂。

本文采用乘积型模糊推理，避免了对输入空间进行划分，大大减少了控制器表达式的求取量，在降阶部分采用 NT 降阶算法[13]，既避免了 KM 降阶算法的重复迭代过程，也避免了文献[4]的取平均过程，分析过程进一步简化。

1　区间二型模糊集合首隶属度函数

一般模糊控制器的输入都选择为误差 e 和误差的变化率 $\dot{e}$ (de/dt)，输出为控制器的增量 Δu。前件为两个输入各定义的模糊变量，后件为单值或者多项式形式，分别对应了 Mamdani 和 T-S 模糊控制器。本文采用三角型首隶属度函数，其模糊变量的定义如图 1 和 2 所示。

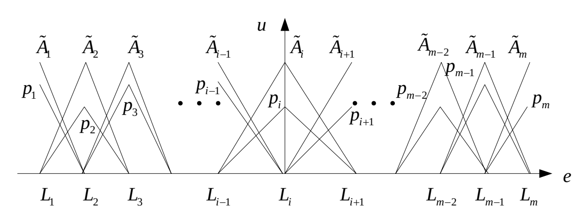


图 1　误差首隶属度函数

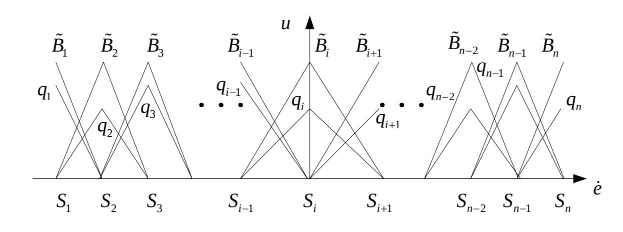


图 2　误差变化率首隶属度函数

由图 1 和 2 的定义，本区间二型模糊控制器一共有 $m\times n$ 条规则。区间二型模糊集合的不确定域通过参数 p_i 和 q_i 实现。

大多数区间二型模糊控制器为了简化起见，后件参数选择单一值。通常情况下，笔者认为任意的误差和误差变化率同时只激活相邻的两个模糊集合，且相邻两个模糊集合的隶属度函数上限之和为 1。那么实际上，每次推理只激活四条模糊规则如下：

规则 1　if e is $\tilde{A}_i$ and $\dot{e}$ is $\tilde{B}_i$,

then $\Delta u=H(i,i)=y_1$

规则 2　if e is $\tilde{A}_i$ and $\dot{e}$ is $\tilde{B}_{i+1}$,

then $\Delta u= H(i,i+1)= y_2$

规则 3　if e is $\tilde{A}_{i+1}$ and $\dot{e}$ is $\tilde{B}_i$,

then $\Delta u= H(i+1,i)= y_3$

规则 4　if e is $\tilde{A}_{i+1}$ and $\dot{e}$ is $\tilde{B}_{i+1}$,

then $\Delta u= H(i+1,i+1)= y_4$

对于误差来说，定义在区间$[L_i,L_{i+1}]$相邻两个模糊集合 $\tilde{A}_i$ 和 $\tilde{A}_{i+1}$ 的上、下隶属度函数如式（1）～（4）所示。

$$\underline{u}_{\tilde{A}_i}(e)=\frac{p_i\times(e-L_{i+1})}{L_i-L_{i+1}}=p_i\times(a_i\times e-b_i) \tag{1}$$

$$\bar{u}_{\tilde{A}_i}(e)=\frac{(e-L_{i+1})}{L_i-L_{i+1}}=a_i\times e-b_i \tag{2}$$

$$\underline{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)=\frac{p_{i+1}\times(e-L_i)}{L_{i+1}-L_i}=p_{i+1}\times(a_{i+1}\times e-b_{i+1}) \tag{3}$$

$$\bar{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)=\frac{(e-L_i)}{L_{i+1}-L_i}=a_{i+1}\times e-b_{i+1} \tag{4}$$

其中：

$$a_i=\frac{1}{L_i-L_{i+1}},\ b_i=\frac{L_{i+1}}{L_i-L_{i+1}},$$

$$a_{i+1}=\frac{1}{L_{i+1}-L_i},\ b_{i+1}=\frac{L_i}{L_{i+1}-L_i}$$

对于误差变化率来说，定义在区间$[S_j,S_{j+1}]$相邻两个模糊集合 $\tilde{B}_j$ 和 $\tilde{B}_{j+1}$ 的上、下隶属度函数如式（5）～（8）所示。

$$\underline{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e})=\frac{q_j\times(\dot{e}-S_{j+1})}{S_j-S_{j+1}}=q_j\times(c_j\times\dot{e}-d_j) \tag{5}$$

$$\bar{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e})=\frac{(\dot{e}-S_{j+1})}{S_j-S_{j+1}}=c_j\times\dot{e}-d_j \tag{6}$$

$$\underline{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e})=\frac{q_{j+1}\times(\dot{e}-S_j)}{S_{j+1}-S_j}=q_{j+1}\times(c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1}) \tag{7}$$

$$\bar{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e})=\frac{(\dot{e}-S_j)}{S_{j+1}-S_j}=c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1} \tag{8}$$

其中：

$$c_j=\frac{1}{S_j-S_{j+1}},\ d_j=\frac{S_{j+1}}{S_j-S_{j+1}},$$

$$c_{j+1}=\frac{1}{S_{j+1}-S_j},\ d_{j+1}=\frac{S_j}{S_{j+1}-S_j}$$

由区间二型模糊逻辑系统的推理过程，模糊规则的激发隶

属度也为一区间[14]，前面描述四条规则的隶属度区间如式（9）~（12）所示。

$$[\underline{f}_1,\overline{f}_1]=[\underline{u}_{\tilde{A}_i}(e)\times\underline{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e}),\overline{u}_{\tilde{A}_i}(e)\times\overline{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e})] \tag{9}$$

$$[\underline{f}_2,\overline{f}_2]=[\underline{u}_{\tilde{A}_i}(e)\times\underline{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e}),\overline{u}_{\tilde{A}_i}(e)\times\overline{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e})] \tag{10}$$

$$[\underline{f}_3,\overline{f}_3]=[\underline{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)\times\underline{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e}),\overline{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)\times\overline{u}_{\tilde{B}_j}(\dot{e})] \tag{11}$$

$$[\underline{f}_4,\overline{f}_4]=[\underline{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)\times\underline{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e}),\overline{u}_{\tilde{A}_{i+1}}(e)\times\overline{u}_{\tilde{B}_{j+1}}(\dot{e})] \tag{12}$$

2 NT 降阶算法

KM 降阶算法是一迭代循环过程，初始化切换点以后，通过不断地比较得到最终的切换点，根据切换点来判断计算端点所需的上或者下隶属度。目前大部分的区间二型模糊控制器的结构分析都是基于 KM 降阶。

但在实际的控制过程中，使用 KM 降阶时，首先要对规则的后件参数进行从大到小排序，这是 KM 算法的实现过程所需要的。排完序以后，再进行迭代搜索得到左、右、切换点。得到左、右切换点以后，最终得到降阶的两个端点，取平均值得到控制器的最终输出。

KM 降阶算法本质上是一迭代算法，用在区间二型模糊逻辑系统里面没有解析解，无法进行系统的稳定性分析。而 Nie-Tan 降阶算法[15]利用模糊规则隶属度上、下限的平均值作为解模糊化的隶属度，这样就得到了区间二型模糊系统的闭环表达式，易于进行稳定性分析。

本文利用 N-T 降阶算法，避免了 KM 迭代，采用乘积型模糊推理，与取小模糊推理相比，避免了模糊空间的划分过程，控制器分析流程进一步简化。具体描述如式（13）（14）所示。

$$\omega_k=\frac{\underline{f}_k+\overline{f}_k}{2}(k=1,\dots,4) \tag{13}$$

$$\Delta u=\frac{\sum_{k=1}^{4}\omega_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{4}\omega_k}=\frac{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\overline{f})\times y_k}{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\overline{f})} \tag{14}$$

3 控制器结构分析

由式（9）~（12）可得

$$[\underline{f}_1,\overline{f}_1]=[p_i\times(a_i\times e-b_i)\times q_j\times(c_j\times\dot{e}-d_j),\ (a_i\times e-b_i)\times(c_j\times\dot{e}-d_j)]$$

$$[\underline{f}_2,\overline{f}_2]=[p_i\times(a_i\times e-b_i)\times q_{j+1}\times(c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1}),\ (a_i\times e-b_i)\times(c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1})]$$

$$[\underline{f}_3,\overline{f}_3]=[p_{i+1}\times(a_{i+1}\times e-b_{i+1})\times q_j\times(c_j\times\dot{e}-d_j),\ (a_{i+1}\times e-b_{i+1})\times(c_j\times\dot{e}-d_j)]$$

$$[\underline{f}_4,\overline{f}_4]=[p_{i+1}\times(a_{i+1}\times e-b_{i+1})\times q_{j+1}\times(c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1}),\ (a_{i+1}\times e-b_{i+1})\times(c_{j+1}\times\dot{e}-d_{j+1})]$$

将隶属度函数的具体表达式带入式（13）（14）可得 Δu 的一般表达式，如式（15）所示。

$$\Delta u=\frac{\xi_1\times e\times\dot{e}+\xi_2\times e+\xi_3\times\dot{e}+\xi_4}{\eta_1\times e\times\dot{e}+\eta_2\times e+\eta_3\times\dot{e}+\eta_4} \tag{15}$$

其中：ξ_1、ξ_2、ξ_3、ξ_4、 η_1、 η_2、 η_3、 η_4 分别为与 p_i、p_{i+1}、L_i、L_{i+1}、q_i、q_{i+1}、S_i、S_{i+1} 相关的常数项。

由式（15）可以看出，基于 NT 降阶算法的区间二型模糊控制器的输出与文献[9]分析的一样，该控制器等效于一个增量式 PI（位置式 PD）控制器，其比例增益、积分增益以及补偿项均为非线性可调。

$$\Delta u=K_I(e,\dot{e})\times e+K_P\times\dot{e}+\delta \tag{16}$$

其中：

$$K_I(e,\dot{e})=\frac{\xi_1\times\dot{e}+\xi_2}{\eta_1\times e\times\dot{e}+\eta_2\times e+\eta_3\times\dot{e}+\eta_4}$$

$$K_P=\frac{\xi_3}{\eta_1\times e\times\dot{e}+\eta_2\times e+\eta_3\times\dot{e}+\eta_4}$$

$$\delta=\frac{\xi_4}{\eta_1\times e\times\dot{e}+\eta_2\times e+\eta_3\times\dot{e}+\eta_4}$$

与文献[9]相比，本文控制器的结构分析过程大大简化，不需要对输入空间进行划分，也不需要针对每个划分的区间分别计算控制器的表达式，表达式的形式也更为简洁。而且还能得到控制器的闭环表达式，易于进行稳定性分析，这是基于 KM 降阶算法的区间二型模糊控制器所不具备的。

4 实例分析

本文选择典型的二阶迟延对象进行比较分析，其传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2\varepsilon\omega_n s+\omega_n^2}e^{-Ls}$$

其中：ε=1.125, ω_n=0.45, L=0.4。

本例的首隶属度函数如图 3 所示。这里选择的误差与误差变化率的首隶属度函数相同。

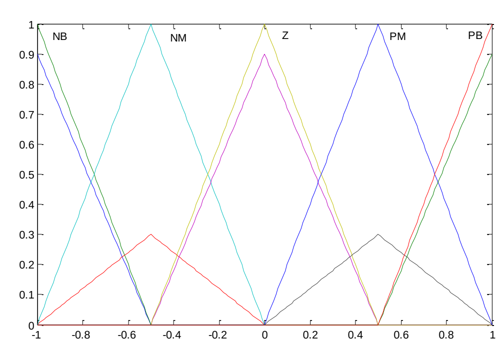


图 3 误差和误差变化率的首隶属度函数

由图 3 看出，本例对误差和误差变化率分别定义了五个模糊变量，分别为 NB（负大）、NM（负中）、Z（零）、PM（正中）、PB（正大）。$p_1=p_3=p_5$=0.9，$p_2=p_4$=0.3，$L_1=S_1$=-1，$L_2=S_2$=-0.5，$L_3=S_3$=0，$L_4=S_4$=0.5，$L_5=S_5$=1。

后件参数[16]定义为NB=-1，NM=-0.8，Z=0，PM=0.8，PB=1。通过输入模糊变量的定义，一共有 5×5=25 条模糊规则，具体的模糊规则[17]如表 1 所示。

表 1 区间二型模糊控制器规则

E/ $\frac{dE}{dt}$	NB	NM	Z	PM	PB
NB	NB	NB	NB	NM	Z
NM	NB	NB	NM	Z	PM
Z	NB	NM	Z	PM	PB
PM	NM	Z	PM	PB	PB
PB	Z	PM	PB	PB	PB

这里的变量区间为[-1,1]，是通过误差和误差变化率的量化因子将实际的值映射到[-1,1]区间。

图 4 显示了采用 PID 控制器、传统一型模糊控制器以及本文算法的阶跃响应曲线。从图 4 可看出，对于给定的二阶迟延系统，传统的一型模糊控制器陷入了等幅震荡，PID 控制器的上升时间教长，响应速度较慢，系统进入稳态时间也教长。而本文方法不仅能保证系统稳定，还能提高系统的响应速度，能够使系统快速稳定。

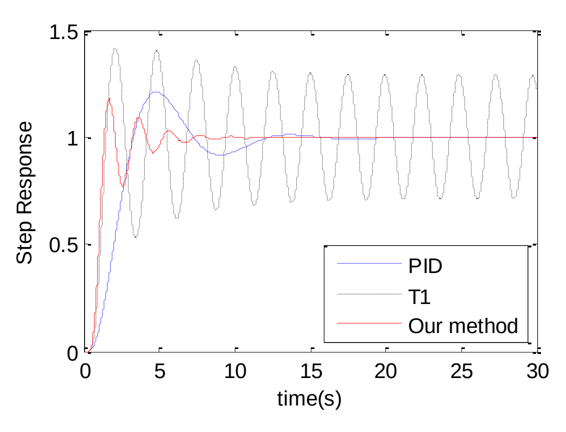


图 4 三种控制器的阶跃响应曲线

当系统运行到 0.5 s 时，通过量化因子的误差和误差变化率的值分别为 0.7654 和-0.1576，那么误差隶属度函数激发的模糊变量为 PM 和 PB，误差变化率隶属度函数激发的模糊变量为 NM 和 Z，实际的四条模糊规则如下：

规则 1 if e is PM and $\dot{e}$ is NM, then $\Delta u=Z=0$

规则 2 if e is PM and $\dot{e}$ is Z, then $\Delta u=PM=0.8$

规则 3 if e is PB and $\dot{e}$ is NM, then $\Delta u=PM=0.8$

规则 4 if e is PB and $\dot{e}$ is Z, then $\Delta u= PB=1$

误差的隶属度上、下限分别为

$$\bar{u}_{PM}(e)=-2\times(e-1)=0.4692$$
$$\underline{u}_{PM}(e)=0.3\times(-2\times(e-1))=0.1408$$
$$\bar{u}_{PB}(e)=2\times(e-0.5)=0.5308$$
$$\underline{u}_{PB}(e)=0.9\times(2\times(e+0.5))=0.4777$$

误差变化率的隶属度上、下限分别为

$$\bar{u}_{NM}(\dot{e})=-2\times\dot{e}=0.3152$$
$$\underline{u}_{NM}(\dot{e})=0.3\times(-2\times\dot{e})=0.0946$$
$$\bar{u}_{Z}(\dot{e})=1+2\times\dot{e}=0.6848$$
$$\underline{u}_{Z}(\dot{e})=0.9\times(2\times\dot{e})=0.6163$$

四条模糊规则的激发隶属度的上、下限为

$$[\underline{f}_1,\bar{f}_1]=[\underline{u}_{PM}(e)\times\underline{u}_{NM}(\dot{e}),\bar{u}_{PM}(e)\times\bar{u}_{NM}(\dot{e})]$$

$$[\underline{f}_2,\bar{f}_2]=[\underline{u}_{PM}(e)\times\underline{u}_{Z}(\dot{e}),\bar{u}_{PM}(e)\times\bar{u}_{Z}(\dot{e})]$$

$$[\underline{f}_3,\bar{f}_3]=[\underline{u}_{PB}(e)\times\underline{u}_{NM}(\dot{e}),\bar{u}_{PB}(e)\times\bar{u}_{NM}(\dot{e})]$$

$$[\underline{f}_4,\bar{f}_4]=[\underline{u}_{PB}(e)\times\underline{u}_{Z}(\dot{e}),\bar{u}_{PB}(e)\times\bar{u}_{Z}(\dot{e})]$$

如果采用常规的 KM 降阶算法，其计算过程如下：

a）将四条规则的后件参数按照从小到大排序，相应的模糊规则的隶属度也作位置调整。从前面的规则描述可看出，规则 1~4 的后件正好是从小到大(0,0.8,0.8,1)，因此这一步已经完成。

b）通过 KM 计算左端点。

（a）初始化：

$$c_l^{'}=\frac{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\bar{f})\times y_k}{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\bar{f})}=0.8018$$

（b）寻找左切换点 L，使得 $y_L\le c_l^{'}\le y_{L+1}$，观察得到 L=3。

（c）计算：

$$c_l=\frac{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k\times y_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k}=0.7362$$

并令 $c_l^{''}=c_l=0.7362$。

（d）由于 $c_l^{''}\ne c_l^{'}$，令 $c_l^{'}=c_l^{''}=0.7362$，接着寻找切换点 L，使得 $y_L\le c_l^{'}\le y_{L+1}$，观察得到 L=1。

（e）计算：

$$c_l=\frac{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k\times y_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k}=0.6965$$

并令 $c_l^{''}=c_l=0.6965$。

（f）由于 $c_l^{''}\ne c_l^{'}$，令 $c_l^{'}=c_l^{''}=0.6965$，接着寻找切换点 L，使得 $y_L\le c_l^{'}\le y_{L+1}$，观察得到 L=1。

（g）计算：

$$c_l=\frac{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k\times y_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{L}\bar{f}_k+\sum_{k=L+1}^{4}\underline{f}_k}=0.6965$$

并令 $c_l^{''}=c_l=0.6965$。

（h）由于 $c_l^{'}==c_l^{''}$，那么迭代过程结束，左切换点 L=1，左端点 $c_l=0.6965$。

c）通过 KM 计算右端点。

（a）初始化：

$$c_r^{'}=\frac{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\overline{f})\times y_k}{\sum_{k=1}^{4}(\underline{f}_k+\overline{f})}=0.8018$$

（b）寻找切换点 R，使得 $y_R\le c_r^{'}\le y_{R+1}$，观察得到 R=3。

（c）计算：

$$c_r=\frac{\sum_{k=1}^{R}\underline{f}\times y_k+\sum_{k=L+1}^{4}\overline{f}_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{L}\underline{f}_k+\sum_{k=L+1}^{4}\overline{f}}=0.9220$$

并令 $c_r^{''}=c_r=0.9220$。

（d）由于 $c_r^{''}\ne c_r^{'}$，令 $c_r^{'}=c_r^{''}=0.9220$，接着寻找切换点 R，使得 $y_R\le c_r^{'}\le y_{R+1}$，观察得到 R=3。

（e）计算：

$$c_r=\frac{\sum_{k=1}^{R}\underline{f}\times y_k+\sum_{k=L+1}^{4}\overline{f}_k\times y_k}{\sum_{k=1}^{L}\underline{f}_k+\sum_{k=L+1}^{4}\overline{f}}=0.9220$$

并令 $c_r^{''}=c_r=0.9220$。

（f）由于 $c_r^{'}==c_r^{''}$，那么迭代过程结束，右切换点 R=3，右端点 $c_r=0.9220$。

d）通过 KM 降阶结果，得到控制器的输出：

$$\Delta u_{KM}=\frac{c_l+c_r}{2}=0.8092$$

即本文的分析结果，最终得到的控制器表达式以及输出为

$$\Delta u_{NT}=\frac{-444\times e\times\dot{e}+794\times e+1238\times\dot{e}+111}{720\times e\times\dot{e}+540\times e-180\times\dot{e}+365}=0.8018$$

本文控制器与利用 KM 降阶算法得到的最终结果相比差值为-0.0074，误差百分比仅为 0.91%。

从以上的分析过程可看出，每一个时刻控制器的输出如果采用 KM 降阶算法都要进行重复的迭代过程，这在实时控制系统中是较为耗时的，而本文方法可直接得到控制器的输出，实时性得到了保证，而且便于进行稳定性分析和控制器设计。

5　结束语

基于输入空间划分是进行模糊控制器的结构分析的主要方法，使用 Zadeh 的 AND（取小）推理，将模糊控制器的输入划分为若干个区间，每个区间的激发隶属度为一确定的表达式。这种分析方法得到的控制器的表达式结构简单，但是输入空间数量较多且与参数有很大关系。此方法应用到二型模糊控制器时，目前主要采用 KM 降阶，通过一个简单的实例，KM 降阶算法效率低下，通过 KM 算法的流程，其无法得出解析解。

本文基于乘积推理，避免了取小推理带来的输入空间划分步骤，可直接得出控制器的一般表达式，且该控制器等效于一个增量式 PI（位置式 PD）控制器，其比例增益、积分增益以及补偿项均为非线性可调，分析过程大大简化。文献[9]也是采用的乘积推理，但其在降阶部分依然是 KM 降阶算法。文献[9]虽然也得到了区间二型模糊控制器的闭环表达式，但依然要进行输入空间的划分，每个输入空间对应了特定的控制器的表达式。

本文利用 NT 降阶算法，该算法已经被证明了是 KM 降阶的一阶泰勒近似，可直接得到区间二型模糊控制器降阶结果。通过本文的实例可看出，两者的降阶结果非常接近，而且还能得到区间二型模糊控制器的闭环表达式，有利于系统进行稳定性分析与设计等。

参考文献：

[1] Ying Hao, Siler W, Buckley J J. Fuzzy control theory: a nonlinear case [J]. Automatica, 1990, 26 (3): 513-520.

[2] Siler W, Ying Hao. Fuzzy control theory: the linear case [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33 (3): 275-290.

[3] Ying Hao. Deriving analytical input-output relationship for fuzzy controllers using arbitrary input fuzzy sets and Zadeh fuzzy and operator [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2006, 14 (5): 654–662.

[4] Du Xinyu, Ying Hao. Derivation and analysis of the analytical structures of the interval type-2 fuzzy-PI and PD controllers [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2010, 18 (4): 802 – 814.

[5] Nie Maowen, Tan W W. Analytical structure and characteristics of symmetric karnik-mendel type-reduced interval type-2 fuzzy PI and PD controllers [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2012, 20 (3): 416-430.

[6] Zhou H, Ying H. A method for deriving the analytical structure of a broad class of typical interval type-2 mamdani fuzzy controllers [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2013, 21 (3): 447-458.

[7] Zhou Haibo, Ying Hao. Deriving and analyzing analytical structures of a class of typical interval type-2 TS fuzzy controllers [J]. IEEE Trans on Cybernetics, 2017, 47 (9): 2492-2502.

[8] 雷宾宾，保宏，许谦．区间二型模糊 PI//PD 控制器设计与结构分析 [J]. 电机与控制学报, 2016, 20 (6): 50-62.

[9] 龙祖强，许岳兵，李龙．一类乘积型区间二型模糊控制器的解析结构 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33 (7): 929-935.

[10] Wu Dongrui, Mendel J M. Enhanced karnik-mendel algorithms [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17 (4): 923–934.

[11] Wu Dongrui, Nie Maowen. Comparison and practical implementation of type-reduction algorithms for type-2 fuzzy sets and systems [C]// Proc of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2011: 2131-2138.

[12] 胡怀中，赵戈，杨华南．一种区间型二型模糊集重心的快速解法 [J]. 控制与决策, 2010, 25 (4): 637-640.

[13] Nie Maowen, Tan W W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems [C]// Proc of IEEE International

Conference on Fuzzy Systems. 2008: 1425-1432.

[14] Liang Qilian, Mendel J. M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8 (5): 535-550.

[15] Nie Maowen, Tan W W. Towards an efficient type-reduction method for interval type-2 fuzzy logic systems [C]// Proc of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2008. 1425-1432.

[16] Kumbasar T, Hagras H. Big Bang-Big Crunch optimization based interval type-2 fuzzy PID cascade controller design strategy [J]. Information Sciences, 2014, 282: 277-295.

[17] Kumar A, Kumar V. A novel interval type-2 fractional order fuzzy PID controller: Design, performance evaluation, and its optimal time domain tuning [J]. ISA Transactions, 2017, 68: 251-275.